2015年 東大 前期理系

第 5 問

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

2015 を 2進法で表すと

$2015 = (11111011111)_{(2)}$

だから $m = (100000)_{(2)} = 32$ // 答

その理由を以下に述べる

${}_{2015}C_0 = 1$

${}_{2015}C_1 = \frac{2015}{1}$

${}_{2015}C_2 = \frac{2015}{1} \cdot \frac{2014}{2}$

${}_{2015}C_3 = \frac{2015}{1} \cdot \frac{2014}{2} \cdot \frac{2013}{3}$

$\cdots\cdots$

だから、分数の列

$\frac{2015}{1}, \frac{2014}{2}, \frac{2013}{3}, \cdots\cdots$

を 2進法で表して、分母分子を 2で何回割れるかを調べる。

というのも、例えば

$56 = (1101000)_{(2)}$

$= (1101)_{(2)} \times (1000)_{(2)}$

$= 7 \times 2^3$

から末尾に並ぶ 0 の個数が最大何回 2で割れるかを表すからだ。

$\frac{2015}{1} = \frac{(11111011111)_{(2)}}{(1)_{(2)}}$

$\frac{2014}{2} = \frac{(11111011110)_{(2)}}{(10)_{(2)}}$

$\frac{2013}{3} = \frac{(11111011101)_{(2)}}{(11)_{(2)}}$

$\frac{2012}{4} = \frac{(11111011100)_{(2)}}{(100)_{(2)}}$

$\frac{1985}{31} = \frac{(11111000001)_{(2)}}{(11111)_{(2)}}$

ここまで末尾の0の個数分母・分子すべて等しく

$\frac{1984}{32} = \frac{(11111000000)_{(2)}}{(100000)_{(2)}}$

ここで、末尾の0の個数で分子のほうが上まわった。

1999年東大

5 (1) k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき、$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件を満たす自然数mをすべて求めよ。
条件：$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

(1) は、

${}_{2^k}C_n = \frac{2^k}{n} {}_{2^k-1}C_{n-1}$ として同じ方法を使えばよい。(2) は自明となる。

※ (1) $m = 2^3 = 8$ として

${}_8C_n = \frac{8}{n} {}_7C_{n-1}$

$= \frac{8}{n} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdots\cdots$

$\frac{7}{1} = \frac{(111)_{(2)}}{(1)_{(2)}}$

$\frac{6}{2} = \frac{(110)_{(2)}}{(10)_{(2)}}$

$\frac{5}{3} = \frac{(101)_{(2)}}{(11)_{(2)}}$

$\frac{4}{4} = \frac{(100)_{(2)}}{(100)_{(2)}}$

$\cdots\cdots$